

Um Simulador Aprimorado para Processos α - η - κ - μ

Vanessa Mendes Rennó e José Cândido Silveira Santos Filho

Resumo— O modelo estatístico α - η - κ - μ oferece uma descrição geral e unificada para todos os elementos essenciais do desvanecimento de curto prazo. Em um trabalho recente, propusemos um simulador para o processo α - η - κ - μ que comporta a faixa plena de valores para os parâmetros do modelo e cumpre as suas estatísticas de primeira e segunda ordens de forma satisfatória. Entretanto, nessa proposta, o ajuste de um parâmetro-chave de simulação foi feito por meio de rotinas numéricas complexas, tornando o simulador menos atraente para equipes de projeto de sistemas sem fio do mundo real. Neste trabalho, aprimoramos esse arcabouço de simulação com base em coeficientes assintóticos das estatísticas α - η - κ - μ . A nova abordagem resulta em expressões simples e fechadas para o ajuste do referido parâmetro-chave, reduzindo o custo computacional do simulador.

Palavras-Chave— processo α - η - κ - μ , simulação, canais de desvanecimento.

Abstract— The α - η - κ - μ statistical model provides a general and unified description for all the essential aspects of short-term fading. In a recent work, we proposed a simulator for the α - η - κ - μ process that comprises the entire range of values for the model's parameters and complies with its first- and second-order statistics. However, in that proposal, the adjustment of a key simulation parameter was done through complex numerical routines, making the simulator less attractive to design teams of real-world wireless systems. In this work, we improve that simulation framework by using asymptotic coefficients of the α - η - κ - μ statistics. This new approach yields simple closed-form expressions for the design of the referred key parameter, reducing the computational cost of the simulator.

Keywords— α - η - κ - μ process, simulation, fading channels.

I. INTRODUÇÃO

Nenhum sistema de comunicação moderno é projetado sem extensas simulações baseadas em computador. Elas são usadas para testar, revisar e melhorar equipamentos, algoritmos e técnicas, enquanto ajudam a evitar ou complementar testes de campo, geralmente caros e demorados. À medida que esses sistemas se tornam mais complexos a cada nova geração de padrões e protocolos de rede, uma estrutura de simulação eficiente e realista se mostra crítica. Em particular, um simulador de desvanecimento é necessário para emular a natureza aleatória e variante no tempo dos canais sem fio. Esse simulador deve obviamente espelhar as probabilidades do canal em qualquer instante fixo de tempo, ou seja, as estatísticas de primeira ordem do canal. Tais estatísticas afetam as métricas estáticas de desempenho, como a taxa de erro de bit e a probabilidade de interrupção do sistema. Além disso, e de forma muito mais sutil e desafiadora, um simulador de desvanecimento também deve espelhar como as variações do

canal se desdobram ao longo do tempo, ou seja, as estatísticas de ordem superior do canal. Tais estatísticas afetam as métricas dinâmicas, como a taxa e duração média de interrupções. Portanto, um bom simulador deve gerar sequências auto-correlacionadas do processo de desvanecimento conforme as propriedades estáticas e dinâmicas do canal sem fio.

Vários modelos estatísticos são usados para descrever a aleatoriedade do desvanecimento de curto prazo. Dentre eles, o modelo α - η - κ - μ fornece um retrato abrangente das variações do canal sem fio [1]. Esse modelo considera todos os principais fenômenos envolvidos na propagação de ondas de rádio por múltiplos percursos. Além disso, cobre uma ampla gama de modelos de desvanecimento da classe gaussiana [2], [3], tendo atraído a atenção da comunidade científica [4]–[6].

É possível simular o canal de desvanecimento α - η - κ - μ reproduzindo-se o próprio modelo físico, escrito como uma soma de componentes gaussianas, também conhecidas como *clusters* de multipercursos [1]. Esse é o esquema clássico de simulação. Todavia, esse esquema tem uma limitação severa: o número de *clusters* deve ser um valor inteiro. Por outro lado, no modelo α - η - κ - μ , o parâmetro que representa o número de *clusters* (μ) foi originalmente proposto para ter um valor real [1], como também verificado empiricamente [4]–[6]. Para contornar essa limitação, propusemos recentemente [7] um novo simulador α - η - κ - μ que acomoda valores reais e arbitrários para todos os parâmetros do modelo, além de cumprir de forma exata as estatísticas de primeira ordem e de fornecer uma boa aproximação às estatísticas de segunda ordem. Em [7], apresentamos um critério de ajuste para um parâmetro-chave de simulação, denominado probabilidade de mistura. Entretanto, esse critério depende de rotinas numéricas onerosas, como detalhado na Seção IV.

Neste trabalho, aprimoramos o arcabouço de simulação que propusemos em [7], introduzindo uma estratégia mais eficiente para o ajuste do referido parâmetro de simulação (probabilidade de mistura). A nova estratégia se baseia no uso de expressões assintóticas para estatísticas essenciais de primeira e segunda ordens do modelo α - η - κ - μ , resultando em uma solução de ajuste simples e em forma fechada. Vale destacar que essas expressões assintóticas, deduzidas aqui como um subproduto, podem ser também úteis para o estudo de outras aplicações sem fio em ambientes do tipo α - η - κ - μ .

O restante deste artigo está organizado como segue. Na Seção II, o modelo de desvanecimento α - η - κ - μ é revisitado. Na Seção III, o simulador do processo α - η - κ - μ é detalhado. O aprimoramento no ajuste da probabilidade de mistura é apresentado na Seção IV. Os resultados numéricos são discutidos na Seção V. Finalmente, a Seção VI fornece as principais conclusões.

V. M. Rennó e J. C. S. Santos Filho fazem parte do Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas-SP, 13083-852, Brasil (e-mails: vmendesr@decom.fee.unicamp.br, candido@decom.fee.unicamp.br).

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), no. 2018/20179-9.

II. O MODELO DE DESVANECIMENTO α - η - κ - μ

Nesta seção, revisitamos alguns fundamentos do modelo de desvanecimento α - η - κ - μ , proposto em [1]. A envoltória R α - η - κ - μ pode ser escrita como [1, Eq. (9)]

$$R^\alpha = \sum_{i=1}^{\mu_x} (X_i + \lambda_{x_i})^2 + \sum_{i=1}^{\mu_y} (Y_i + \lambda_{y_i})^2, \quad (1)$$

em que $\alpha > 0$ representa a não-linearidade do meio de transmissão; $\{X_i\}_{i=1}^{\mu_x}$ e $\{Y_i\}_{i=1}^{\mu_y}$ são processos gaussianos mutuamente independentes de média nula e variância σ_x^2 e σ_y^2 , respectivamente; λ_{x_i} e λ_{y_i} são, respectivamente, os valores médios das componentes em fase e quadratura do i -ésimo *cluster*; e μ_x e μ_y são, respectivamente, o número de *clusters* de multipercursos das componentes em fase e quadratura.

As estatísticas do modelo de desvanecimento α - η - κ - μ foram originalmente expressas em três formatos distintos [1]: *Raw Parameterization*, *Local Parameterization*, e *Global Parameterization*. Essas parametrizações podem ser facilmente mapeadas umas nas outras, conforme detalhado em [1]. Aqui, por conveniência, nos concentramos na *Global Parameterization*, dada em termos dos seguintes parâmetros: (i) $\alpha > 0$ representa a não-linearidade do meio de transmissão; (ii) $\eta > 0$, definido como a razão entre a potência total das ondas espalhadas em fase e a potência total das ondas espalhadas em quadratura; (iii) $\kappa > 0$, definido como a razão entre a potência total das componentes dominantes e a potência total das ondas espalhadas; (iv) $\mu > 0$, definido como o número total de *clusters* de multipercurso; (v) $q > 0$, definido como a razão entre duas razões, a primeira sendo a razão entre a potência das componentes dominantes e a potência das ondas espalhadas no sinal em fase, e a segunda, a razão entre a potência das componentes dominantes e a potência das ondas espalhadas no sinal em quadratura; (vi) $p > 0$, definido como a razão entre o número de *clusters* de multipercurso das componentes em fase e quadratura; e (vii) $\hat{r} > 0$, definido como $\sqrt[\alpha]{\mathbb{E}(R^\alpha)}$, sendo $\mathbb{E}(\cdot)$ o operador de esperança matemática.

Em [1], as estatísticas α - η - κ - μ de primeira ordem, ou seja, a função densidade de probabilidade (*probability density function*, PDF) e a função de distribuição acumulada (*cumulative distribution function*, CDF), foram introduzidas. Mais tarde, em [8], novas representações eficientes foram fornecidas para essas estatísticas. Em particular, para a análise que segue, usaremos uma representação em série da CDF α - η - κ - μ $F_R(r)$, obtida como [8]

$$F_R(r) = \exp\left(-\frac{\kappa\mu}{\delta}\right) \left(\frac{\eta}{p}\right)^{\frac{\mu}{1+p}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\eta}{p}\right)^n L_n^{\frac{\mu}{1+p}-1} \left(\frac{\eta\kappa\mu}{\delta(\eta-p)}\right) \times \left(1 - Q_{n+\mu} \left(\sqrt{\frac{2pq\kappa\mu}{\delta}}, \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2p\xi\mu}{\eta}}\right)\right), \quad (2)$$

em que $\xi \triangleq (1+\eta)(1+\kappa)/(1+p)$, $\delta \triangleq (1+q\eta)(1+p)/(1+\eta)$, $L_n^\lambda(x)$ é o polinômio generalizado de Laguerre [9, Eq. (22.3.9)], e $Q_\nu(a; b)$ é a função Marcum-Q [9].

Em [5], as principais estatísticas de segunda ordem, incluindo a taxa de cruzamento de nível (*level crossing rate*, LCR) e a duração média de desvanecimento (*average fade*

duration, AFD), foram obtidas para o modelo α - η - κ - μ . Fórmulas alternativas foram apresentadas em [10], incluindo uma representação em série para a LCR α - η - κ - μ $N_R(r)$:

$$N_R(r) = \frac{2d\sqrt{-\dot{\Psi}(0)}(\xi\mu)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+d)\exp\left(\frac{(1+pq)\kappa\mu}{\delta}\right)} \left(\frac{\eta}{p}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{\mu}{1+p}} r^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})} \times \frac{\hat{r}^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}}{\hat{r}^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}} \times \exp\left(-\frac{\xi\mu pr^\alpha}{\eta\hat{r}^\alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{p^2 q \kappa \xi \mu^2 r^\alpha}{\eta \delta \hat{r}^\alpha}\right)^j \left(\frac{(p-\eta)\xi\mu r^\alpha}{\eta\hat{r}^\alpha}\right)^n \times L_n^{\frac{\mu}{1+p}-1} \left(-\frac{\eta\kappa\mu}{\delta(p-\eta)}\right) {}_2\tilde{F}_1 \left(-\frac{1}{2}, n + \frac{\mu}{1+p}; j + n + \mu; 1 - \frac{p}{d^2\eta}\right), \quad (3)$$

em que ${}_2\tilde{F}_1(a; b; c; x)$ é a forma regularizada da função hipergeométrica de Gauss [9, Eq. (15.1.1)], $\dot{\Psi}(\cdot)$ é a segunda derivada temporal da função de autocorrelação e d denota a razão entre as componentes em fase e quadratura da referida derivada, como detalhado em [10]. Consequentemente, $2(-\dot{\Psi}(0))^{1/2} = (-\dot{\Psi}_x(0))^{1/2} + (-\dot{\Psi}_y(0))^{1/2}$ e $d = (-\dot{\Psi}_x(0))^{1/2}/(-\dot{\Psi}_y(0))^{1/2}$. Aqui, consideramos o cenário isotrópico, no qual $\dot{\Psi}_Z(0) = -2\pi^2 f_Z^2$, sendo f_Z o máximo desvio Doppler, com Z denotando X ou Y , quando se considera a componente em fase ou quadratura, respectivamente. Finalmente, a AFD α - η - κ - μ $T_R(r)$ é obtida a partir de sua representação geral como

$$T_R(r) = \frac{F_R(r)}{N_R(r)}, \quad (4)$$

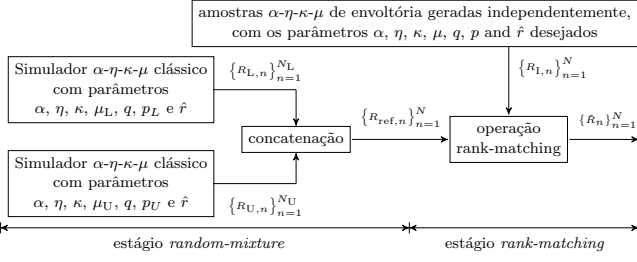
em que $F_R(r)$ e $N_R(r)$ são dadas por (2) e (3).

O método clássico de simulação do canal α - η - κ - μ replica seu modelo físico, dado em (1), no qual a envoltória R é obtida em função de μ_x componentes gaussianas em fase e μ_y componentes gaussianas em quadratura. Nesse método de simulação, os parâmetros μ_x e μ_y são restritos a valores inteiros e, consequentemente, o número de *clusters* de multipercurso, ou seja, $\mu = (\mu_x + \mu_y)/2$, é restrito a valores inteiros e meio inteiros. Essa é uma restrição bastante severa e pouco realista, uma vez que valores não-inteiros de *clusters* de multipercurso têm sido extensamente observados em testes de campo [4]–[6]. Além disso, ao contrário do modelo físico de desvanecimento e do esquema de simulação clássico, as estatísticas α - η - κ - μ resultantes, apresentadas em (2)–(4), não possuem quaisquer restrições matemáticas de uso para valores reais e arbitrários do parâmetro μ [1].

O modelo de desvanecimento α - η - κ - μ abrange vários outros como casos particulares, conforme detalhado em [1, Sec. VI].

III. O SIMULADOR DO PROCESSO α - η - κ - μ

Nesta seção, revisitamos o simulador do processo de desvanecimento α - η - κ - μ proposto em [7]. O esquema não apenas reproduz adequadamente as estatísticas de primeira e segunda ordens do referido modelo de desvanecimento, como também remove uma limitação severa do método de simulação clássico ao acomodar valores reais arbitrários do parâmetro μ . A solução foi inspirada no esquema de simulação Nakagami- m introduzido em [11], que se baseia na combinação em cascata de duas técnicas de simulação, denominadas *random mixture* [12] e *rank matching* [13]. Um diagrama de blocos do simulador é apresentado na Fig. 1, em que α , η , κ , μ , q , p ,


 Fig. 1. O simulador para o processo de desvanecimento α - η - κ - μ .

e \hat{f} são os parâmetros de desvanecimento desejados de uma sequência de N amostras a ser gerada.

Primeiro, no estágio *random-mixture*, duas sequências α - η - κ - μ de referência são geradas separadamente por meio do método clássico, descrito na Seção II. É, portanto, necessário que essas sequências de referência correspondam a um número inteiro de componentes gaussianas. Para tanto, a partir dos valores desejados de μ e p , os valores desejados correspondentes de μ_x e μ_y são calculados. Então, uma sequência de referência (digamos, R_L , com “L” denotando “lower”) é especificada arredondando-se para baixo (aos inteiros mais próximos) μ_x e μ_y , ou seja, $\mu_{xL} = \lfloor \mu_x \rfloor$ para as componentes em fase e $\mu_{yL} = \lfloor \mu_y \rfloor$ para as componentes em quadratura. De forma semelhante, a outra sequência de referência (digamos, R_U , com “U” denotando “upper”) é especificada arredondando-se para cima μ_x e μ_y , ou seja, $\mu_{xU} = \lceil \mu_x \rceil$ para as componentes em fase e $\mu_{yU} = \lceil \mu_y \rceil$ para as componentes de quadratura. Para essas sequências, os valores de μ e p devem ser recalculados correspondentemente [1]. Em resumo, uma sequência de referência α - η - κ - μ R_L é gerada com os parâmetros de desvanecimento α , η , κ , μ_L , q , p_L , e \hat{f} , e outra sequência de referência α - η - κ - μ R_U é gerada com parâmetros de desvanecimento α , η , κ , μ_U , q , p_U , e \hat{f} . Observe que ambas as sequências contêm um número inteiro de *clusters* de multipercurso para as componentes em fase e quadratura.

A sequência de saída do estágio *random-mixture* (digamos, R_{ref}) é formada concatenando-se as sequências R_L e R_U , em qualquer ordem. Para que R_{ref} contenha N amostras, os comprimentos de R_L (digamos, N_L) e R_U (digamos, N_U) devem satisfazer $N_L + N_U = N$. Sejam $N_L = \text{round}(p_{\text{mix}}N)$ e $N_U = N - N_L$, com $0 \leq p_{\text{mix}} \leq 1$. De fato, p_{mix} e $1 - p_{\text{mix}}$ são parâmetros-chaves de simulação, denominados probabilidades de mistura. Esses parâmetros governam a frequência relativa de amostras de R_L e R_U em R_{ref} . Como resultado, qualquer estatística de R_{ref} pode ser escrita como a soma ponderada das estatísticas correspondentes de R_L e R_U . Os pesos são dados por p_{mix} e $1 - p_{\text{mix}}$, respectivamente. O dimensionamento dessas probabilidades é uma tarefa central do estágio *random-mixture*, detalhada na Seção IV.

A saída do estágio *random-mixture* fornece a entrada para o estágio *rank-matching* [13]. Nesse estágio, uma sequência α - η - κ - μ de saída (digamos, \check{R}) é obtida a partir da sequência de N amostras de referência R_{ref} e de um conjunto de N amostras α - η - κ - μ (digamos, R_I) geradas independentemente, segundo os parâmetros de desvanecimento α , η , κ , μ , q , p , e \hat{f} desejados (por exemplo, através do método em [14]). A sequência de

saída \check{R} é um mero rearranjo das amostras em R_I , de forma que as amostras em \check{R} correspondam exatamente ao *ranking* das amostras da sequência de referência R_{ref} , ou seja, os mínimos ocorrem na mesma posição, os segundos mínimos ocorrem na mesma posição, e assim por diante. Essa operação é chamada de *rank matching*. Devido ao estágio *random-mixture* anterior, R_{ref} é um processo α - η - κ - μ com parâmetros de desvanecimento α , η , κ , μ_L , q , p_L , e \hat{f} , com probabilidade p_{mix} , ou um processo α - η - κ - μ com parâmetros de desvanecimento α , η , κ , μ_U , q , p_U , e \hat{f} , com probabilidade $1 - p_{\text{mix}}$. Vale ressaltar que a operação *rank-matching* garante que a sequência de saída \check{R} cumpra de maneira exata as estatísticas de primeira ordem do modelo α - η - κ - μ [13]. Além disso, conforme desejado, a cascata proposta dos estágios *random-mixture* e *rank-matching* permite valores reais e arbitrários de todos os parâmetros do modelo α - η - κ - μ (μ incluído). Resta analisar as estatísticas de segunda ordem de \check{R} , como segue.

Em [15], foi demonstrado que a geração de \check{R} a partir de R_{ref} e R_I via operação *rank-matching* é assintoticamente equivalente à geração de \check{R} , a partir de R_{ref} sozinho, pelo tradicional método da inversão, à medida que N tende ao infinito. Portanto, considerando-se esse cenário assintótico, a sequência de saída do simulador \check{R} pode ser escrita em termos da sequência de referência R_{ref} como $\check{R} = F_R^{-1}(F_{R_{\text{ref}}}(R_{\text{ref}}))$, em que $F_R^{-1}(\cdot)$ é a CDF inversa da envoltória α - η - κ - μ com os parâmetros desejados α , η , κ , μ , q , p , e \hat{f} , e, condicionada a $\text{ref} = L$ ou $\text{ref} = U$, $F_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$ é a CDF da envoltória α - η - κ - μ com parâmetros α , η , κ , μ_{ref} , q , p_{ref} , e \hat{f} . A CDF é dada por (2), e a sua inversa pode ser calculada numericamente usando-se qualquer plataforma matemática comercial. Para a análise a seguir, convém escrever R_{ref} em termos de \check{R} , ou seja,

$$R_{\text{ref}} = F_{R_{\text{ref}}}^{-1}(F_R(\check{R})) \triangleq h_{R_{\text{ref}}}(\check{R}), \quad (5)$$

em que $F_R(\cdot)$ é a CDF da envoltória α - η - κ - μ com parâmetros desejados α , η , κ , μ , q , p , e \hat{f} , e $F_{R_{\text{ref}}}^{-1}(\cdot)$ é a CDF inversa da envoltória α - η - κ - μ com parâmetros α , η , κ , μ_{ref} , q , p_{ref} , e \hat{f} .

Com base em (5), podemos obter qualquer estatística de \check{R} em função da estatística correspondente de R_{ref} . Como o estágio *rank-matching* é precedido pelo estágio *random-mixture*, as estatísticas de \check{R} são fornecidas como uma soma ponderada das estatísticas individuais quando $\text{ref} = L$ e $\text{ref} = U$, com os pesos sendo dados pelas probabilidades de mistura p_{mix} e $1 - p_{\text{mix}}$, respectivamente. Dessa maneira, a LCR e a AFD do simulador α - η - κ - μ são finalmente obtidas como

$$N_{\check{R}}(r) = p_{\text{mix}}N_{R_L}(h_{R_L}(r)) + (1 - p_{\text{mix}})N_{R_U}(h_{R_U}(r)) \quad (6)$$

$$T_{\check{R}}(r) = p_{\text{mix}}T_{R_L}(h_{R_L}(r)) + (1 - p_{\text{mix}})T_{R_U}(h_{R_U}(r)). \quad (7)$$

IV. APRIMORANDO O SIMULADOR α - η - κ - μ

A partir de (6) e (7), nota-se que a probabilidade de mistura p_{mix} é um parâmetro crucial de simulação que afeta diretamente as estatísticas de segunda ordem do simulador apresentado na Seção III. Por outro lado, as estatísticas de primeira ordem são cumpridas de forma exata, devido ao estágio *rank-matching*. Assim, em [7], a probabilidade de mistura foi dimensionada para melhorar o ajuste das estatísticas de segunda ordem do simulador em relação ao modelo α - η - κ - μ , como detalhado a seguir.

Um valor apropriado de p_{mix} pode ser selecionado para coincidir exatamente com a LCR ou a AFD do modelo em qualquer nível-alvo de envoltória (digamos, r_{th}). Isso é alcançado resolvendo-se (6) ou (7) para p_{mix} , como [7]

$$p_{\text{mix}} = \frac{N_R(r_{\text{th}}) - N_{R_U}(h_{R_U}(r_{\text{th}}))}{N_{R_L}(h_{R_L}(r_{\text{th}})) - N_{R_U}(h_{R_U}(r_{\text{th}}))} \quad \text{ou} \quad (8)$$

$$p_{\text{mix}} = \frac{T_R(r_{\text{th}}) - T_{R_U}(h_{R_U}(r_{\text{th}}))}{T_{R_L}(h_{R_L}(r_{\text{th}})) - T_{R_U}(h_{R_U}(r_{\text{th}}))}, \quad (9)$$

em que, vale lembrar, as LCRs e as AFDs são dadas por (3) e (4), respectivamente, com os parâmetros de desvanecimento desejados α , η , κ , μ , q , p , e \hat{r} para $N_R(\cdot)$ e $T_R(\cdot)$, e com os parâmetros α , η , κ , μ_{ref} , q , p_{ref} , e \hat{r} para $N_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$ e $T_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$ (ref = L ou ref = U, conforme requerido).

Em princípio, podemos escolher em (8) ou (9) qualquer nível-alvo de envoltória r_{th} para que a LCR ou a AFD exatas sejam satisfeitas. Por outro lado, na prática, as interrupções de sistema ocorrem para níveis de sinal muito baixos. Portanto, uma escolha adequada é um nível-alvo $r_{\text{th}} \ll 1$ que melhor se adapte aos requisitos de interrupção da aplicação em questão e à sensibilidade do receptor em operação.

Todavia, há uma forte desvantagem no método de ajuste de p_{mix} proposto em [7], reproduzido em (8) e (9). Essas expressões requerem, em última análise, a avaliação numérica de $h_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$, definido em (5) em termos da CDF α - η - κ - μ em (2) e da CDF inversa, e a avaliação numérica da LCR e da AFD α - η - κ - μ , usando-se (2)–(4). Alternativamente, explorando a hipótese realista de que $r_{\text{th}} \ll 1$, deduzimos a seguir fórmulas simples e fechadas para p_{mix} ao substituir os termos $N_R(\cdot)$, $T_R(\cdot)$, $N_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$, $T_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$, e $h_{R_{\text{ref}}}(\cdot)$ em (8) e (9) por expressões assintóticas, quando $r_{\text{th}} \rightarrow 0$. Para isso, empregamos as representações em série fornecidas em (2)–(4) para a CDF, LCR, e AFD do modelo de desvanecimento α - η - κ - μ . Ao longo da análise, “ \sim ” significa “assintoticamente igual em torno de zero”, ou seja, $f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 1$.

Considere, por exemplo, a representação em série da CDF α - η - κ - μ , dada em (2). Mantendo apenas o primeiro termo, com $n = 0$, e após simplificações algébricas (omitidas por brevidade), obtemos uma expressão assintótica para a CDF α - η - κ - μ como $F_R(r) \sim a_0 r^{b_0}$, em que a_0 e b_0 são coeficientes assintóticos, dados por

$$a_0 = \frac{(\mu\xi)^\mu}{\mu\Gamma(\mu)\hat{r}^{\alpha\mu}} \exp\left(-\frac{(1+pq)\kappa\mu}{\delta}\right) \left(\frac{p}{\eta}\right)^{\frac{p\mu}{1+p}} \quad (10a)$$

$$b_0 = \alpha\mu. \quad (10b)$$

Similarmente, considere a representação em série da LCR α - η - κ - μ , dada em (3). Mantendo apenas o primeiro termo, com $n = j = 0$, e após simplificações algébricas, encontramos uma expressão assintótica da LCR α - η - κ - μ como $N_R(r) \sim c_0 r^{d_0}$, em que

$$c_0 = \frac{2d\sqrt{-\Psi(0)}(\mu\xi)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+d)\hat{r}^{\alpha(\mu-\frac{1}{2})}} \exp\left(-\frac{(1+pq)\kappa\mu}{\delta}\right) \left(\frac{p}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p\mu}{1+p}} \times \\ {}_2\tilde{F}_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\mu}{1+p}; \mu; 1 - \frac{p}{d^2\eta}\right) \quad (11a)$$

$$d_0 = \alpha\left(\mu - \frac{1}{2}\right) \quad (11b)$$

são coeficientes assintóticos da LCR. A análise assintótica da AFD segue diretamente da representação dada em (2), resultando em $T_R(r) \sim (a_0/c_0)r^{b_0-d_0}$, em que a_0 , b_0 , c_0 , e d_0 são obtidos por (10) e (11). Por sua vez, a função $h_{R_{\text{ref}}}(r)$, definida em (5), depende da CDF e da CDF inversa do modelo α - η - κ - μ . Usando $F_R(r) \sim a_0 r^{b_0}$ e (10) em (5), obtemos, depois de simplificações algébricas, $h_{R_{\text{ref}}}(r) \sim e_0 r^{f_0}$, em que e_0 e f_0 são coeficientes assintóticos dados por

$$e_0 = \left(\frac{\exp\left(\frac{(1+p_{\text{ref}}q)\kappa\mu_{\text{ref}}}{\delta_{\text{ref}}}\right) \hat{r}^{\alpha\mu_{\text{ref}}} (\mu\xi)^\mu \left(\frac{p}{\eta}\right)^{\frac{p\mu}{1+p}} \Gamma(1+\mu_{\text{ref}})}{\exp\left(\frac{(1+p_{\text{ref}}q)\kappa\mu}{\delta}\right) \hat{r}^{\alpha\mu} (\mu_{\text{ref}}\xi_{\text{ref}})^{\mu_{\text{ref}}} \left(\frac{p_{\text{ref}}}{\eta}\right)^{\frac{p_{\text{ref}}\mu_{\text{ref}}}{1+p_{\text{ref}}}} \Gamma(1+\mu)} \right)^{\frac{1}{\alpha\mu_{\text{ref}}}} \quad (12a)$$

$$f_0 = \frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}. \quad (12b)$$

Finalmente, substituindo-se todos esses resultados assintóticos em (8) e (9), expressões simples para o ajuste de p_{mix} são obtidas, respectivamente, como

$$p_{\text{mix}} \sim \frac{c_0 \times r_{\text{th}}^{d_0} - c_{0U} \times \left(e_{0U} r_{\text{th}}^{f_{0U}}\right)^{d_{0U}}}{c_{0L} \times \left(e_{0L} r_{\text{th}}^{f_{0L}}\right)^{d_{0L}} - c_{0U} \times \left(e_{0U} r_{\text{th}}^{f_{0U}}\right)^{d_{0U}}} \quad (13)$$

$$p_{\text{mix}} \sim \frac{\frac{a_0}{c_0} \times r_{\text{th}}^{b_0-d_0} - \frac{a_{0U}}{c_{0U}} \times \left(e_{0U} r_{\text{th}}^{f_{0U}}\right)^{b_{0U}-d_{0U}}}{\frac{a_{0L}}{c_{0L}} \times \left(e_{0L} r_{\text{th}}^{f_{0L}}\right)^{b_{0L}-d_{0L}} - \frac{a_{0U}}{c_{0U}} \times \left(e_{0U} r_{\text{th}}^{f_{0U}}\right)^{b_{0U}-d_{0U}}}, \quad (14)$$

em que os coeficientes a_0 , b_0 , c_0 , d_0 , e_0 , e f_0 são dados por (10)–(12). Em (13) e (14), acrescentamos o subscrito L ou U em alguns coeficientes. Esse subscrito indica que o coeficiente é calculado com parâmetros de desvanecimento α , η , κ , μ_{ref} , q , p_{ref} , e \hat{r} (ref = L ou ref = U, conforme aplicável).

O ajuste assintótico em forma fechada para p_{mix} via (13) ou (14) é não apenas bem mais simples do que as rotinas numéricas necessárias em (8) e (9), mas também altamente preciso se $r_{\text{th}} \ll 1$, como recomendado em aplicações práticas. De fato, o ajuste se mostra satisfatório mesmo em circunstâncias em que $r_{\text{th}} \ll 1$ não se cumpre. Além disso, as expressões assintóticas apresentadas em (10)–(12) são, por si só, contribuições analíticas que podem simplificar o estudo de outras aplicações sem fio em ambiente α - η - κ - μ .

V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, apresentamos resultados analíticos e de simulação para o método proposto, para valores aleatórios dos parâmetros de desvanecimento α - η - κ - μ . Nosso objetivo não é discutir as estatísticas α - η - κ - μ em si; uma discussão completa já foi feita em [1]. Em vez disso, visamos apenas ilustrar o comportamento do simulador e do aprimoramento proposto em comparação com as estatísticas teóricas do modelo α - η - κ - μ , para uma ampla gama de cenários.

A Fig. 2 apresenta essa comparação. São consideradas apenas as estatísticas de segunda ordem, visto que, por construção, o simulador proposto cumpre as estatísticas de primeira ordem exatas do modelo α - η - κ - μ . A LCR é mostrada na Fig. 2-(a), e a AFD, na Fig. 2-(b), para o mesmo conjunto de parâmetros.

As estatísticas do modelo α - η - κ - μ , dadas em (3) e (4), são apresentadas em linhas sólidas; as estatísticas analíticas do simulador, fornecidas por (6) e (7), em linhas tracejadas; e os resultados de simulação de Monte Carlo do esquema, com marcadores. Em todas as simulações, usamos $N = 10^7$ amostras. Para calibrar p_{mix} via (13) e (14), usamos, como exemplo, um nível-alvo normalizado de envoltória igual a $r_{\text{th}}/\hat{r} = -25$ dB. A calibração original [7], via (8) e (9), é omitida nos gráficos, por fornecer resultados praticamente indistinguíveis de (13) e (14).

Observa-se que os resultados de simulação e as expressões analíticas para o esquema de simulação proposto coincidem perfeitamente. Além disso, observa-se que, na maioria dos casos, o esquema proposto mantém uma excelente concordância com as estatísticas do modelo α - η - κ - μ . Note que, se $\mu_x \geq 1$ ou $\mu_y \geq 1$, uma concordância exata é alcançada no nível-alvo de envoltória ($r_{\text{th}}/\hat{r} = -25$ dB). Por outro lado, essa concordância não é exata se $\mu_x < 1$ e $\mu_y < 1$. Isso ocorre porque nesse caso $\mu_L = 0$ ($\mu_{xL} = 0$ e $\mu_{yL} = 0$) e $\mu_U = 1$ ($\mu_{xU} = 1$ e $\mu_{yU} = 1$). Em outras palavras, a sequência com o parâmetro μ_L é nula, assim como a LCR e a AFD associadas. Isso, por sua vez, faz com que (13) e (14) produzam valores negativos para p_{mix} , que, é claro, deve ser arredondado para o valor legítimo mais próximo: $p_{\text{mix}} = 0$. Ainda assim, mesmo em condições tão improváveis ($\mu_x < 1$ e $\mu_y < 1$), o simulador proposto apresenta um desempenho aceitável, acompanhando o formato geral das curvas exatas. Na Fig. 2, isso pode ser observado para o cenário com $\mu = 0.45$.

VI. CONCLUSÕES

Recentemente, propusemos um simulador para o processo α - η - κ - μ que acomoda valores arbitrários dos parâmetros de desvanecimento e cumpre adequadamente as estatísticas do modelo. Neste trabalho, tornamos esse simulador mais eficiente, ao substituir o ajuste de um parâmetro-chave via rotinas numéricas de alto custo computacional por expressões compactas em forma fechada. A nova abordagem é baseada na caracterização assintótica de estatísticas de primeira e segunda ordens do modelo α - η - κ - μ . Além de simples, o ajuste assintótico é altamente preciso para condições realistas de projeto. Esperamos que nosso método aprimorado de simulação possa tornar o modelo α - η - κ - μ mais acessível, servindo como uma ferramenta prática para auxiliar na análise, dimensionamento, e otimização de sistemas sem fio avançados.

REFERÊNCIAS

- [1] M. D. Yacoub, “The α - η - κ - μ fading model,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 8, pp. 3597–3610, Aug. 2016.
- [2] —, “The α - μ distribution: A physical fading model for the Stacy distribution,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [3] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [4] X. Li, X. Chen, J. Zhang, Y. Liang, and Y. Liu, “Capacity analysis of α - η - κ - μ fading channels,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 21, no. 6, pp. 1449–1452, Jun. 2017.
- [5] A. A. dos Anjos, T. R. R. Marins, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, “Higher order statistics for the α - η - κ - μ fading model,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 66, no. 6, pp. 3002–3016, Jun. 2018.

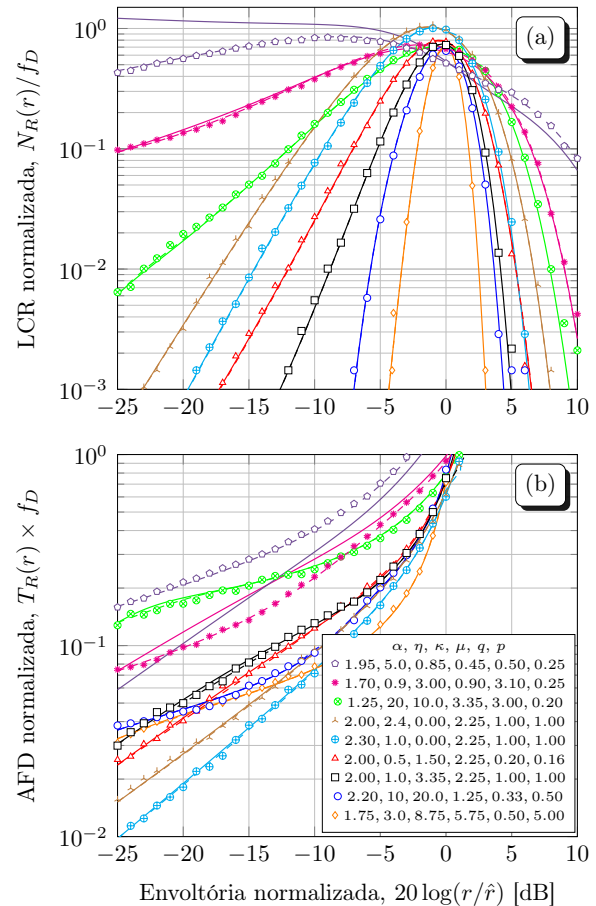


Fig. 2. LCR e AFD para o simulador α - η - κ - μ (modelo de desvanecimento: sólido; simulador proposto, analítico: tracejado; simulador proposto, empírico: marcadores).

- [6] A. Mathur, Y. Ai, M. R. Bhatnagar, M. Cheffena, and T. Ohtsuki, “On physical layer security of α - η - κ - μ fading channels,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 2168–2171, Oct. 2018.
- [7] V. M. Rennó and J. C. S. Santos Filho, “On the generation of autocorrelated α - η - κ - μ fading sequences,” in *IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, Jul. 2021.
- [8] C. R. N. da Silva, G. R. D. L. Tejerina, and M. D. Yacoub, “The α - η - κ - μ fading model: New fundamental results,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 68, no. 1, pp. 443–454, 2020.
- [9] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover, 1972.
- [10] A. A. Dos Anjos, T. R. R. Marins, C. R. N. da Silva, V. M. R. Peñarocha, L. Rubio, J. Reig, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, “Higher order statistics in a mmwave propagation environment,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 103 876–103 892, 2019.
- [11] J. C. S. Santos Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, and G. T. F. Abreu, “The RM^2 Nakagami fading channel simulator,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 12, no. 5, pp. 2323–2333, May 2013.
- [12] G. T. F. Abreu, “On the moment-determinance and random mixture of Nakagami- m variates,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 9, pp. 2561–2575, Sep. 2010.
- [13] J. C. S. Santos Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, “A simple accurate method for generating autocorrelated Nakagami- m envelope sequences,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11, no. 3, pp. 231–233, Mar. 2007.
- [14] V. M. Rennó, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, “On the generation of white samples in severe fading conditions,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 23, no. 1, pp. 180–183, Jan. 2019.
- [15] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, “Coloring non-gaussian sequences,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 12, pp. 5817–5822, Dec. 2008.